CÁLCULO 3- INTRODUCCIÓN: INTEGRALES IMPROPIAS

Correo del profesor: mreyes@fi.upm.es

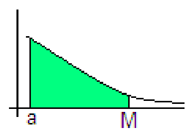
Libros recomendados: Marsden-Tromba , Calculo vectorial ; Calculo III Guía de clase

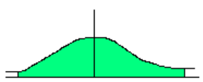
Integrales impropias

Tipo 1

f: [a, ∞] → ℝ y f es acotada

$\int_a^M f(x)dx \quad \to \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$



Si  → $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$

Ejemplo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx$$

1. $\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx = \ lim_{M\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-x}\ dx = \ lim_{M\to\infty} [-e^{-x}]_0^M = \ lim_{M\to\infty} (-e^{-M} + 1) = \ 1$

2. $[-e^{-x}]_0^{\infty} = -e^{-\infty} + 1 = 1$

Ejemplo:

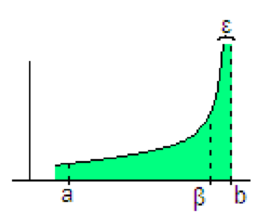
$\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+3}\ dx \ = \ \infty$ porque $\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+3}\ dx \ = \ lim_{M\to\infty} \int_0^M 1 - \frac{4}{x^2+3}\ dx \ =$

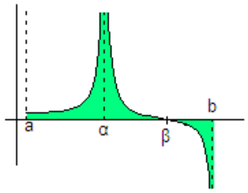
$$\lim_{M\to\infty} \left[x - \frac{4}{\sqrt{3}} arc\,tan \frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^M \ = \ \infty$$

Tipo 2

f: [a, ∞] → ℝ y f no es acotada

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^{\beta} f(x)dx$$



Si 

$$\int_a^b = \int_a^\alpha + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^b$$

Águeda Mata y Miguel Reyes, Dpto. de Matemática Aplicada, FI-UPM.

INTEGRALES IMPROPIAS

Definición

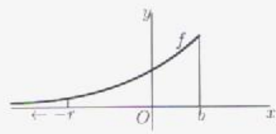
Se dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una **integral impropia** cuando el intervalo de integración es infinito (a o b son $\pm\infty$) o la función $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ no está acotada.

Integral impropia de primera especie

Es cualquier integral de la forma $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ o $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es acotada en cada intervalo de la forma $[-r, b]$ o $[a, r]$, según el caso, con $r \in \mathbb{R}$. En estos casos se define la integral impropia como:

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f(x)\,dx$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^b f(x)\,dx$

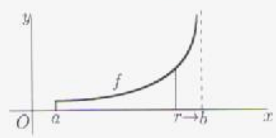


siendo convergente cuando el límite es finito, y divergente cuando es infinito. Cuando no existe el límite se dice que la integral impropia no existe.

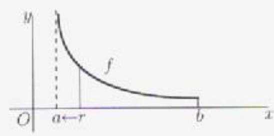
Integral impropia de segunda especie

Es cualquier integral de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es acotada en cada intervalo de la forma $[a, r]$ o $[r, b]$, según el caso, con $a < r < b$. En estos casos se define la integral impropia como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)\,dx$$



siendo convergente cuando el límite es finito, y divergente cuando es infinito. Cuando no existe el límite se dice que la integral impropia no existe.

Observación: Cualquier integral impropia se puede descomponer en suma de integrales impropias de primera y/o segunda especie. Se dice que la integral es convergente cuando lo son todas las integrales de primera y/o segunda especie en que se descompone, siendo divergente en caso contrario.

Ejemplos

Estudia la convergencia (hallando su valor) o divergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $I_p = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ **(b)** $J_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

Criterio de comparación

Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces:

- $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge
- $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

Ejemplos

Estudia la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$

Ejercicios

1. Evalúa las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \cos^2 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\,dx$

2. Evalúa las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x(x+1)}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

3. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2x^2+b^2}\,,\ ab \neq 0$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$

4. Estudia la convergencia, según los valores de p y q, de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2+(t-b)^2}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Se pide:

(a) Esboza su gráfica en el caso $a = 1$ y $b = 0$.

(b) Obtén explícitamente $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

(c) Determina el área comprendida entre la gráfica y el eje de abscisas.

Criterio de comparación

f, g : [a,b] → ℝ y 0≤ f(x) ≤ g(x) ,,

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Luego $\begin{cases} si \int_a^b f(x)dx \ ,, \ \int_a^b g(x)dx = \infty \\ si \int_a^b g(x)dx < \infty ,, \ \int_a^b f(x)dx < \infty \end{cases}$

Ejemplo

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ y $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty$ como $\frac{1}{x^{3/2}}$ es convergente, $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ también

Ejemplo

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ y $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ luego 1/x no sirve.

$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{x\cdot\sqrt{2}}$ → $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ así es que $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \infty$

Ejercicio

Estudiar convergencia de a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ y b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{M\to\infty} \int_1^\infty x^{-p}\, \mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{x^{p+1}}{-p+1}\right]_1^M =$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{M^{-p+1}-1}{1-p} = \begin{cases} \infty & si \quad -p+1 > 0 \leftrightarrow p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & si \quad -p+1 < 0 \leftrightarrow p = 1 \end{cases}$$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-p}\, \mathrm{dx} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{p+1}}{-p+1}\right]_\varepsilon^1 =$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{-p+1} + \frac{\varepsilon^{p+1}}{-p+1}\right) = \frac{1}{-\mathrm{p}+1}$$

Si p≠1 : $\begin{cases} \infty \quad si \quad p \geq 1 \\ \frac{1}{1-p} \quad si \quad 0 < p < 1 \end{cases}$

Teorema fundamental del cálculo integral

F(x) = $\int_a^x f(t)dt \;\; \rightarrow \;\; F'(x) = \; f(x)$

Si $\int_a^b f(x,t)dt = F(x) \; \rightarrow (regla\ de\ Leibnitz)\ F'(x) = \; \int_a^b \frac{\delta t}{\delta x}(x,t)\ dt$

Si $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt \; \rightarrow (regla\ gralizada\ de\ Leibnitz)$

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\delta t}{\delta x}(x,t)\ dt + f(x,b(x))b'(x) - \; f\big(x,a(x)\big)a'(x)$$